פרק ד': תורת הקשרים הפסוקיים – שינויים והערות

כאן נדון בנושאי יצירת לוחות האמת והקשרים בדרך שונה במעט מאשר בספר. נחליף חלקים מפרק ד' במה שכתוב בהמשך.

הקשרים הפסוקיים העומדים לרשותנו הם לא רק הקשרים הפסוקיים היסודיים אלא גם קשרים פסוקיים שאנו מקבלים מהם ע"י הרכבה. למשל, הקשר $\leftrightarrow$ הוגדר ע"י $\phi \leftrightarrow \psi = \phi \wedge \psi \vee \neg\phi \wedge \neg\psi$. קשר זה התקבל ע"י הרכבה של הקשרים $\wedge$, $\neg$ ו-$\vee$. כמו כן, הקשר $\bigvee_{i=1}^{3} \phi_i = (\phi_1 \vee \phi_2) \vee \phi_3$ התקבל ע"י הרכבה של $\vee$ עם עצמו. לכן אנו רוצים לדעת מהם כל הקשרים הפסוקיים המתקבלים מן הקשרים הפסוקים היסודיים ע"י הרכבה, ולשם כך אנו צרכיסים להכיר באופן מלא את היצירה של קשרים חדשים מקשרים נתונים ע"י פעולת ההרכבה. נדון ביצירה כזאת לא רק בהקשר של הקשרים אלא בהקשר כללי יותר של פונקציות על קבוצה כלשהי.

הרכבה פשוטה של הפונקציה התלת מקומית g עם הפונקציות הדו מקומיות f_1 ו-f_2 היא $h(x,y) = g(f_1(x,y), f_2(x,y), f_1(x,y))$. הרכבה שיותר מסובך לתאר אותה היא, למשל, $h(x,y) = g(y, f_1(x,y), f_2(y,x))$. אנו מעוניינים בהגדרה של יצירת פונקציות ע"י הרכבה שמצד אחד תהיה פשוטה ומצד שני תכלול גם הרכבות כמו בדוגמה השניה שהבאנו. חשוב לנו שהגדרת יצירת הפונקציות תהיה פשוטה כי נרצה להוכיח דברים על כל הפונקציות הנוצרות מפונקציות נתונות, וככל שההגדרה תהיה פשוטה יותר כן יקל עלינו להוכיח דברים על כל הפונקציות הנוצרת. אנו יכולים להשיג מטרה זאת בעזרת הפונקציות בהגדרה הבאה.

4.11 הגדרה. עבור קבוצה A נתונה ו- $1 \leq i \leq n$ $p^A_{n,i}$ תהיה הפונקציה מקבוצת ה-n-יות של איברי A ל-A הנתונה ע"י $p^A_{n,i}(x_1, \ldots, x_n) = x_i$. הפונקציות $p^A_{n,i}$ נקראות **פונקציות היטל**.

אנו נשמיט מ-$p^A_{n,i}$ את האינדקס העליון A היכן שברור באיזו קבוצה A מדובר.

אנו קוראים לפונקציות אלו פונקציות היטל כי, למשל, אם R היא קבוצת המספרים הממשיים אז הפונקציה $p_{2,1}$ היא ההיטל של המישור על ציר ה-x והפונקציה $p_{2,2}$ היא ההיטל של המישור על ציר ה-y.

השימוש בפונקציות ההיטל מאפשר לנו להגדיר בצורה פשוטה הרכבות כמו ההרכבה $h(x,y) = g(y, f_1(x,y), f_2(y,x))$ שראינו לעיל. הרכבה זאת ניתנת להיכתב כ- $h(x,y) = g(p_{2,2}(x,y), f_1(x,y), f_2(p_{2,2}(x,y), p_{2,1}(x,y)))$.

4.11.1 הגדרה וסימון. א. פונקציה $f : A^n \rightarrow A$ תיקרא **פונקציה n-מקומית מ-A ל-A**, והיכן שברור מהי הקבוצה A, נקרא לה פונקציה n-מקומית.

ב. פונקציה f נקראת **רב מקומית** מ-A ל-A אם קיים $n \geq 1$ כך ש-f היא n-מקומית.

הערה: שים לב שהמושג של פונקציה רב מקומית כולל גם את המקרה בו $n = 1$ שבו הפונקציה היא חד מקומית.

ג. הסימון $\vec{x}$ הוא קיצור ל- $x_1, \ldots, x_n$.

4.11.2 הרכבת פונקציות. עבור $n, k \geq 1$ תהיינה $f_1, \ldots f_k$ פונקציות n-מקומיות מ-A ל-A, ותהי g פונקציה k-מקומית מ-A ל-A. $g(f_1, \ldots, f_k)$ מוגדר כפונקציה ה-n-מקומית מ-A ל-A הנתונה ע"י $g(f_1, \ldots, f_k)(\vec{x}) = g(f_1(\vec{x}), \ldots, f_k(\vec{x}))$. בכל מקום בו נכתוב $g(f_1, \ldots, f_k)$, נתכוון לכך שכל הפונקציות $f_1, \ldots, f_n$ הן בנות אותו מספר של מקומות.

4.11.3 הגדרה. תהי W קבוצת פונקציות רב מקומיות מ-A ל-A. פונקציה רב מקומית מ-A ל-A נקראת **נוצרת מ-W** אם היא כך לאור הכללים הבאים:

א. כל פונקצית היטל מ-A ל-A היא נוצרת מ-W.

ב. אם $h = g(f_1, \ldots, f_k)$ היכן ש- $g \in W$ ו- $f_1, \ldots, f_k$ הן פונקציות נוצרות מ-W אז גם h נוצרת מ-W.

ג. פונקציה היא נוצרת מ-W רק אם היא נוצרת מ-W לפי א' ו-ב'.

הערה: יותר טבעי להרשות בהגדרה זאת לפונקציה g להיות פונקציה כלשהי הנוצרת מ-W ולאו דווקא פונקציה הנמצאת ב-W. בחרנו לדרוש ש- $g \in W$ כי זה, מצד אחד, מצמצם את ההגדרה, ומצד שני זה אינו משנה את מושג הפונקציה הנוצרת, כפי שנראה ב-4.15.4.

יכולנו להוסיף להגדרה את הדרישה שכל פונקציה ב-W היא נוצרת מ-W, אולם תוספת זאת מיותרת כי א' ו-ב' מספיקים כדי להוכיח זאת, כפי שנראה עתה.

4.11.4 משפט. תהי W קבוצת פונקציות רב מקומיות מ-A ל-A. כל פונקציה ב-W נוצרת מ-W.

הוכחה. תהי $g \in W$. לכל $x_1, \dots, x_n \in A$ קיים $g(x_1, \dots, x_n) = g(p_{n,1}(\vec{x}), p_{n,2}(\vec{x}), \dots, p_{n,n}(\vec{x}))$, ולכן $g = g(p_{n,1}, \dots, p_{n,n})$. מכיוון שלפי א' $p_{n,1}, \dots, p_{n,n}$ הן פונקציות נוצרות מ-W לכן לפי ב' גם $g(p_{n,1}, \dots, p_{n,n})$, השווה ל-$g$, היא פונקציה נוצרת מ-$W$.

ההגדרה שהבאנו למושג הפונקציה הנוצרת מ-W היא הגדרה סתומה, כי ב-ב' נאמר ש-h נוצרת מ-W אם הפונקציות $f_1, \dots, f_k$ נוצרות מ-W. כדי להפוך את ההגדרה להגדרה מפורשת עלינו ללכת בדרך בה הלכנו בהגדרת מושג הפסוק ונעשה זאת כאן.

4.11.5 הגדרה. א. סידרת הפונקציות $f_1, \dots, f_m$ נקראת **סדרת יצירה של פונקציות מ-W** אם לכל $1 \le i \le m$ f_i היא פונקצית היטל או ש- $f_i = g(f_{j_1}, \dots, f_{j_k})$ עבור $g \in W$ ו- $1 \le j_1, \dots, j_k < i$, כלומר $f_{j_1}, \dots, f_{j_k}$ הן פונקציות המופיעות לפני f_i בסדרה.

ב. פונקציה נקראת **נוצרת מ-W** אם היא רכיב של סדרת יצירה של פונקציות מ-W.

מהגדרה 4.11.5 קל להוכיח את 4.11.3א' ו-ב' (ראה הוכחת 2.6 במהדורה החדשה) וכן את:

כל פונקציה נוצרת מ-W היא פונקצית היטל או שהיא בעלת הצורה $g(f_1, \dots, f_k)$, היכן ש- $g \in W$ ו- $f_1, \dots, f_k$ נוצרות מ-W (ראה 2.10 במהדורה החדשה).

4.11.6 תרגיל. תן הגדרה למושג הפסוק הדומה ל-4.11.3 ואינה משתמשת במושג של סדרת היצירה.

כעת יש לקרוא את 4.13 ו-4.14 בספר. את 4.15א' בספר יש לנסח כדלקמן:

יהיו $t, t_1, \dots, t_n$ לוחות אמת ו- $t', t'_1, \dots, t'_n$ לוחות האמת הדואליים להם, בהתאמה. אם $t(t_1, \dots, t_n)$ מוגדר אז גם $t'(t'_1, \dots, t'_n)$ מוגדר והוא לוח האמת הדואלי ל- $t(t_1, \dots, t_n)$.

כאשר אנו רוצים להוכיח משהו על מושג מתמטי שהוגדר עלינו להשתמש, כמובן, בהגדרה שלו. מכיוון שמושג הפונקציה הנוצרת הוגדר בהגדרה סתומה או באמצעות סידרת יצירה לכן הדרך הטבעית להוכיח טענות על הפונקציות הנוצרות היא אינדוקציה, כפי שננסח במשפט הבא.

4.15.1 אינדוקציה על יצירת הפונקציה. תהי W קבוצת פונקציות מ-A ל-A, ותהי **ת** תכונה. נניח כי **ת** מקיימת את שני התנאים הבאים.

א. כל פונקצית היטל מ-A ל-A היא בעלת התכונה **ת**.

ב. אם עבור $k, n \ge 1$ $g \in W$ היא פונקציה k-מקומית ו- $f_1, \dots, f_k$ הן פונקציות n-מקומיות שהן בעלות התכונה **ת**, אז גם $g(f_1, \dots, f_k)$ היא בעלת התכונה **ת**.

אז כל פונקציה נוצרת מ-W היא בעלת התכונה **ת**.

הוכחה. הוכחה זאת דומה מאוד להוכחת משפט האינדוקציה על יצירת הפסוק. פרטי ההוכחה נשארים לקורא כתרגיל.

דוגמה פשוטה לשימוש בהוכחה באינדוקציה על יצירת פונקציה היא הבאה.

4.15.2 משפט כל פונקציה h מ-$\{T, F\}$ ל-$\{T, F\}$ הנוצרת מ- $\{t_\vee, t_\wedge\}$ היא בעלת התכונה ש- $h(T, T, \dots, T) = T$, ולכן הפונקציה $t_\neg$ שאינה בעלת תכונה זאת אינה נוצרת מ- $\{t_\vee, t_\wedge\}$.

הוכחה. נוכיח שכל פונקציה h נוצרת מ- $\{t_\vee, t_\wedge\}$ היא בעלת התכונה ש- $h(T, T, \dots, T) = T$ באינדוקציה על יצירת h.

לפונקצית היטל קיים כמובן $p_{n,i}(T, T, \dots, T) = T$.

אם f_1 ו-f_2 הן בעלות תכונה זאת אז אם $h = t_\wedge(f_1, f_2)$ אז

$h(T, \dots, T) = t_\wedge(f_1(T, \dots, T), f_2(T, \dots, T)) = t_\wedge(T, T) = T$, וכן גם ל- $h = t_\vee(f_1, f_2)$.

4.15.3 תרגיל. תהי W קבוצת פונקציות רב מקומיות מ-A ל-A, ותהי $U \subseteq W$. אז כל פונקציה נוצרת מ-U היא גם נוצרת מ-W.

4.15.4 משפט. תהי W קבוצת פונקציות רב מקומיות מ-A ל-A, ותהיינה $h, f_1, \dots, f_k$ פונקציות נוצרות מ-W, אז גם הפונקציה $h(f_1, \dots, f_k)$ נוצרת מ-W.

שים לב שבהגדרת מושג הפונקציה הנוצרת מ-W h היא איבר של W בעוד שכאן h היא פונקציה כלשהי הנוצרת מ-W.

הוכחה. נוכיח באינדוקציה על יצירת h שהפונקציה הנוצרת h היא בעלת התכונה של המשפט.

אם h היא פונקצית ההיטל $p_{k,i}$ אז $h(f_1,\ldots,f_k)=f_i$, ו-f_i היא פונקציה נוצרת מ-W לפי הנחתנו.

כעת נניח כי $h_1,\ldots,h_m$ הן פונקציות בעלות התכונה ש- $h_i(f_1,\ldots,f_k)$ נוצרת מ-W, ו- $g\in W$ ונוכיח שגם עבור $h=g(h_1,\ldots,h_m)$ קיים ש- $h(f_1,\ldots,f_k)$ נוצרת מ-W. נתון אם כן

$$h(f_1,\ldots,f_k)=g(h_1(f_1,\ldots,f_k),\ldots,h_m(f_1,\ldots,f_k)) \qquad (1).$$

לפי הנחת האינדוקציה כל פונקציה $h_i(f_1,\ldots,f_k)$ נוצרת מ-W, ומכיוון ש- $g\in W$ לכן, לפי הגדרת מושג הפונקציה הנוצרת, אגף ימין של (1) הוא פונקציה נוצרת מ-W.

4.15.5 משפט. תהי W קבוצת פונקציות רב מקומיות מ-A ל-A, ותהי V קבוצת פונקציות נוצרות מ-W. כל פונקציה נוצרת מ-V היא נוצרת מ-W.

הוכחה. הוכחת המשפט, המשתמשת במשפט 4.15.4, נשארת לקורא כתרגיל.

המשפט הבא מבטא את הקשר ההדוק בין יצירת לוחות האמת ליצירת הקשרים.

4.16 משפט. א. תהי C קבוצת קשרים ו-D קבוצת לוחות האמת שלהם. אז כל פונקציה מקבוצת כל הפסוקים לקבוצת כל הפסוקים שהיא נוצרת מ-C היא קשר פסוקי ולוח האמת שלה נוצר מ-D.

ב. תהי D קבוצה של לוחות אמת ו-C קבוצת קשרים כך שלכל לוח אמת $t\in D$ יש קשר $c\in C$ כך ש-t הוא לוח האמת של c. אז לכל לוח אמת t הנוצר מ-D קיים קשר c נוצר מ-C כך ש-t הוא לוח האמת של c.

הוכחה. א. נסמן ב-Π את קבוצת כל הפסוקים. תהי c פונקציה נוצרת ע"י C, ונוכיח באינדוקציה ש-c קשר ולוח האמת שלה נוצר ע"י D.

אם c היא פונקצית ההיטל $p^{\Pi}_{n,i}$ אז לכל $\phi_1,\ldots,\phi_n$ קיים $c(\phi_1,\ldots,\phi_n)=\phi_i$ ואז c הוא קשר ופונקצית ההיטל $p^{\{T,F\}}_{n,i}$ היא לוח האמת שלה, כי לכל מבנה $\boldsymbol{A}$ קיים

$$\boldsymbol{A}(c(\phi_1,\ldots,\phi_n))=\boldsymbol{A}(\phi_i)=p^{\{T,F\}}_{n,i}(\boldsymbol{A}(\phi_1),\ldots,\boldsymbol{A}(\phi_n)).$$

אם $c_1,\ldots,c_k$ הם קשרים שלוחות האמת שלהם נוצרים ע"י D ו-$c\in C$ אז נראה כי גם $c^*=c(c_1,\ldots,c_k)$ הוא קשר שלוח האמת שלו נוצר ע"י D. יהיו $t_1,\ldots,t_k$ לוחות האמת של $c_1,\ldots,c_k$, ואז לפי הנחתנו $t_1,\ldots,t_k$ נוצרים מ-D. יהי t לוח האמת של c. מכיוון ש-$c\in C$ לכן לפי הנחת המשפט $t\in D$. לפי הגדרת מושג הפונקציה הנוצרת הפונקציה $t^*=t(t_1,\ldots,t_k)$ היא נוצרת מ-D. נשים לב ש-t^* מתקבלת מ- $t,t_1,\ldots,t_k$ בדיוק כמו ש- c^* מתקבלת מ- $c,c_1,\ldots,c_k$. נראה עתה כי c^* הוא קשר ו-t^* הוא לוח האמת שלו. לכל מבנה $\boldsymbol{A}$ קיים

$$\boldsymbol{A}(c^*(\phi_1,\ldots,\phi_n))=\boldsymbol{A}(c(c_1(\phi_1,\ldots,\phi_n),\ldots,c_n(\phi_1,\ldots,\phi_n)))$$

ומכיוון ש-t הוא לוח האמת של c לכן

$$=t(\boldsymbol{A}(c_1(\phi_1,\ldots,\phi_n)),\ldots,\boldsymbol{A}(c_k(\phi_1,\ldots,\phi_n)))$$

ומכיוון שלכל $1\le i\le k$ t_i הוא לוח האמת של c_i לכן

$$=t(t_1(\boldsymbol{A}(\phi_1),\ldots,\boldsymbol{A}(\phi_n)),\ldots,t_k(\boldsymbol{A}(\phi_1),\ldots,\boldsymbol{A}(\phi_n)))=t^*(\boldsymbol{A}(\phi_1),\ldots,\boldsymbol{A}(\phi_n))$$

ב. תהי t לוח אמת נוצר ע"י D, ונוכיח באינדוקציה שקיים קשר c נוצר ע"י C כך ש-t הוא לוח האמת של c.

אם t הוא פונקצית ההיטל $p^{\{T,F\}}_{n,i}$ אז, בפי שראינו לעיל, t הוא לוח האמת של הקשר $p^{\Pi}_{n,i}$.

אם $t_1,\ldots,t_k$ הם לוחות האמת של קשרים $c_1,\ldots,c_k$ הנוצרים מ-C ו- $t\in D$ אז, לפי הנחת המשפט, קיים קשר $c\in C$ כך ש-t הוא לוח האמת שלו, ואז, כפי שראינו לעיל, $t(t_1,\ldots,t_k)$ הוא לוח האמת של הקשר $c(t_1,\ldots,t_c)$, שהוא נוצר מ-C, לפי הגדרת מושג הפונקציה הנוצרת.

4.23 הגדרה. א. קבוצת לוחות אמת W נקראת **שלמה** אם כל לוח אמת (לפחות חד-מקומי) נוצר ממנה. ממשפט 3 נובע כי הקבוצה $t_\wedge,t_\vee$ אינה שלמה.

ב. קבוצת קשרים פסוקיים W נקראת **שלמה** אם לכל לוח אמת t קיים קשר c הנוצר מ-W ש-t הוא לוח האמת שלו.

משפט השלמות מבחינת לוחות האמת אומר שקבוצת הקשרים $\neg,\wedge,\vee$ היא שלמה.

4.25 משפט. א. תהי V קבוצת לוחות אמת הנוצרים מקבוצה W של לוחות אמת. אם V היא קבוצה שלמה של לוחות אמת אז גם W היא כן.